EXERCICE 15 (deuxième version): Corrigé

1) En isolant la pièce (1) celle-ci est en équilibre sous les actions :

- $\left\{\tau(0\rightarrow 1)\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(0\rightarrow 1)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$ car L(1/0) = pivot $(D,\vec{z}_0)$ parfaite et problème plan.
- $\left\{\tau(2\rightarrow 1\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(2\rightarrow 1)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$ car L(2/1) = pivot $(C,\vec{z}_0)$ parfaite et problème plan.

Donc les deux forces $\overrightarrow{R(0\rightarrow 1)}$ et $\overrightarrow{R(2\rightarrow 1)}$ sont directement opposées, elles ont donc la même direction (DC) dirigée par $\vec{x}_1$

D'où . $\overrightarrow{R(1\rightarrow 2)} = -\overrightarrow{R(2\rightarrow 1)} = R_{12}\,\vec{x}_1$

2) Le TMS appliqué au mors (2) au point B $\Rightarrow \overrightarrow{M_B(\bar{2}\rightarrow 2)} = \vec{0}$

Donc $\underbrace{\overrightarrow{M_B(3\rightarrow 2)}}_{\substack{\vec{0}\text{ car L(3/2) pivot }(B,\vec{z}_0)\\ \text{parfaite et problème plan}}} + \overrightarrow{M_B(1\rightarrow 2)} + \overrightarrow{M_B(6\rightarrow 2)} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{M_B(1\rightarrow 2)} = \overrightarrow{M_C(1\rightarrow 2)} + \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{R(1\rightarrow 2)}$$
$$= \vec{0} + e\,\vec{y}_0\wedge R_{12}\,\vec{x}_1 = -eR_{12}\cos\alpha\,\vec{z}_0$$
$$\overrightarrow{M_B(6\rightarrow 2)} = \overrightarrow{M_P(6\rightarrow 2)} + \overrightarrow{BP}\wedge\overrightarrow{R(6\rightarrow 2)}$$
$$= \vec{0} + (\lambda\,\vec{x}_0 - c\,\vec{y}_0)\wedge(F_T\vec{x}_0 + F_N\,\vec{y}_0)$$
$$= (\lambda F_N + cF_T)\vec{z}_0$$

Donc $-eR_{12}\cos\alpha\,\vec{z}_0 + (\lambda F_N + cF_T)\vec{z}_0 = \vec{0}$ en projetant sur $\vec{z}_0$ on obtient :

$-eR_{12}\cos\alpha + \lambda F_N + cF_T = 0$

3) En isolant le système $\Sigma = \left\{2,3\right\}$ celui-ci est en équilibre sous les actions :

- $\left\{\tau(0\rightarrow 3)\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(0\rightarrow 3)} \\ \boxed{\vec{0}} \end{Bmatrix}_A$ car L(0/3) = pivot $(A,\vec{z}_0)$ parfaite et problème plan.
- $\left\{\tau(1\rightarrow 2)\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(1\rightarrow 2)} = R_{12}\,\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$
- $\left\{\tau(6\rightarrow 2)\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(6\rightarrow 2)} = F_T\,\vec{x}_0 + F_N\,\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P$
- $\left\{\tau(4\rightarrow 3)\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(4\rightarrow 3)} = T\,\vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E$

On applique à $\Sigma = \left\{2,3\right\}$ le TMS au point A : $\overrightarrow{M_A(\bar{\Sigma}\rightarrow \Sigma)} = \vec{0}$

$$\underbrace{\overrightarrow{M_A(0\rightarrow 3)}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{M_A(1\rightarrow 2)} + \overrightarrow{M_A(6\rightarrow 2)} + \overrightarrow{M_A(4\rightarrow 3)} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{R(1\rightarrow 2)} + \overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{R(6\rightarrow 2)} + \overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{R(4\rightarrow 3)} = \vec{0}$$

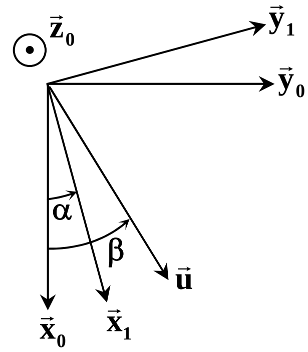
(Tous les torseurs sont des glisseurs)

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\wedge\overrightarrow{R(1\rightarrow 2)} + \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)\wedge\overrightarrow{R(6\rightarrow 2)} + \overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{R(4\rightarrow 3)} = \vec{0}$$

Or d'après **2)** on a $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{R(1\rightarrow 2)} + \overrightarrow{BP}\wedge\overrightarrow{R(6\rightarrow 2)} = \vec{0}$

Donc $\underbrace{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R(1\rightarrow 2)} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R(6\rightarrow 2)}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{R(4\rightarrow 3)} = \vec{0}$

(cette simplification est due à l'architecture du système en parallélogramme, si vous l'avez pas remarquée vous aurez l'équation de la question **2)** qui va apparaitre une deuxième fois et qui va se simplifier bien sur : mais plus de calcul !!)



$$L\,\vec{x}_1 \wedge \left(F_T\,\vec{x}_0 + F_N\,\vec{y}_0\right) + a\,\vec{x}_1 \wedge -T\,\vec{u} = \vec{0}$$

Donc $-LF_T \sin\alpha\,\vec{z}_0 + LF_N \cos\alpha\,\vec{z}_0 - a\,T\sin(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0 = \vec{0}$

En projetant sur $\vec{z}_0$ on obtient :

$$-LF_T \sin\alpha + LF_N \cos\alpha - a\,T\sin(\beta-\alpha) = 0 \qquad (1)$$

4) Le TRS appliqué à (6) en projection sur $\vec{x}_0 \Rightarrow \vec{x}_0.\overrightarrow{R(\bar{6}\to 6)} = 0$

$$\vec{x}_0.\overrightarrow{R(2\to 6)} + \vec{x}_0.\overrightarrow{R(2'\to 6)} + \vec{x}_0.\overrightarrow{R(pes\to 6)} = 0$$

$$-\vec{x}_0.\overrightarrow{R(6\to 2)} - \vec{x}_0.\overrightarrow{R(6\to 2')} + \vec{x}_0.\overrightarrow{R(pes\to 6)} = 0$$

On a par symétrie : $\left\{\tau(6\to 2')\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(6\to 2')} = F_T\,\vec{x}_0 - F_N\,\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{P'}$

Donc $-2F_T + M_6 g = 0 \qquad (2)$

D'où $$F_T = \frac{M_6 g}{2}$$

5) (1) et (2)) $\Rightarrow$ $F_N = \dfrac{LF_T \sin\alpha + a\,T\sin(\beta-\alpha)}{L\cos\alpha}$

$$F_N = \frac{LM_6 g\sin\alpha + 2a\,T\sin(\beta-\alpha)}{2L\cos\alpha}$$

6) Non glissement de la pièce (6) par rapport aux mors (2) et (2') si

$$\left\|\overrightarrow{T(2\to 6)}\right\| \le f \left\|\overrightarrow{N(2\to 6)}\right\| \;\Rightarrow\; \left|-F_T\right| \le f\left|-F_N\right| \;\Rightarrow\; \left|F_T\right| \le f\left|F_N\right|$$

On a $F_T > 0$ et de même $F_N > 0$ car d'après l'énoncé α et $\beta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\beta > \alpha$

Donc $$\frac{M_6 g}{2} \le f\,\frac{LM_6 g\sin\alpha + 2a\,T\sin(\beta-\alpha)}{2L\cos\alpha}$$

$$M_6 g\left(1 - f\tan\alpha\right) \le \frac{2a\,fT\sin(\beta-\alpha)}{L\cos\alpha} \;\Rightarrow\; M_6 \le \frac{2a\,fT\sin(\beta-\alpha)}{Lg\left(1-f\tan\alpha\right)\cos\alpha}$$

D'où $$M_{6Max} = \frac{2a\,fT\sin(\beta-\alpha)}{Lg\left(1-f\tan\alpha\right)\cos\alpha}$$